LKの証明図に関する標準型定理 (2階算術の諸体系の研究)

池田, 一麿

数理解析研究所講究録
1096 巻 1999 年 1-14

LK の証明図に関する標準型定理

筑波大学数学研究科　　池田一磨 (Kazuma Ikeda)

概要

本稿においては, LK に関する Mints の定理および Arai と Mints による定理を論文 [1, 2, 4] に従って紹介する. これらの定理は, Gentzen の cut elimination theorem (cf.[3]) を拡張した定理である. cut elimination theorem は ω までの超限帰納法で示され, その応用として LK の無矛盾性を導く. 一方, Mints の定理の定理は ε_0 までの超限帰納法で示され, PA の無矛盾性を導く. Arai と Mints による定理はより一般化された定理で, その一つの応用として PA の ω-無矛盾性を導く.

1 準備

Mints の定理および Arai と Mints による定理は, 一般の言語に関する定理であるが, その応用は PA およびそれを拡張した理論に関して与えられている. よって, 本節では PA およびそれを拡張した理論に関して次節以降で必要または関連した事柄について扱う.

Notation 本稿で使用する記法をまとめておく.

$\ulcorner t \urcorner$	:	term t の Gödel number に対応する numeral
$\ulcorner A \urcorner$	:	論理式 A の Gödel number に対応する numeral
$\mathrm{num}(x)$	:	自然数 n に, n 番目の numeral の Gödel number を対応させる原始帰納的関数をあらわす関数記号. よって, $\mathrm{num}(\bar{n}) = \ulcorner \bar{n} \urcorner$.
$\mathrm{sub}(x, y, z)$	:	論理式 $A(x)$ の Gödel number と変数 x の Gödel number と term t の Gödel number に, $A(t)$ の Gödel number を対応させる原始帰納的関数をあらわす関数記号. よって, $\mathrm{sub}(\ulcorner A(x) \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner A(t) \urcorner$.
$\ulcorner A(\dot{x}) \urcorner$	:	$\mathrm{sub}(\ulcorner A(x) \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(x))$
$\mathrm{end}(x)$	:	証明図 π の Gödel number に π の end sequent の Gödel number を対応させる原始帰納的関数をあらわす関数記号.
$\mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(y, x)$	:	canonical proof predicate for a theory $\mathcal{A}$.
$\mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(x)$	:	$\exists y \mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(y, x)$
$x \in \Sigma_k(\Pi_k)$	:	“x は $\Sigma_k(\Pi_k)$-sentence である” をあらわす p.r. predicate.
$\mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(x)$	:	partial truth definition for Σ_k-sentence.
$\mathrm{Tr}_{\Pi_k}(x)$	:	partial truth definition for Π_k-sentence.

ここで, $\mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(y,x)$ と $x \in \Sigma_k(\Pi_k)$ は qf-論理式, $\mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(x)$ は Σ_1-論理式, $\mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(x)$ は Σ_k-論理式, $\mathrm{Tr}_{\Pi_k}(x)$ は Π_k-論理式である.

Reflection principle $\mathrm{RFN}(\mathcal{A})$, ω-consistency ω-$\mathrm{CON}^{\mathrm{G}}(\mathcal{A})$ および k-consistency k-$\mathrm{CON}(\mathcal{A})$ を以下のように定義する.

定義 1.1 $\mathcal{A}$ を算術の言語の理論とする.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathrm{RFN}(\mathcal{A}) & : & \forall x[\mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(x,\mathrm{end}(x)) \wedge \mathrm{end}(x) \in \Sigma_k \supset \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(x))] & (k \in \omega) \\
\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(\mathcal{A}) & : & \forall x[\mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(x,\mathrm{end}(x)) \wedge \mathrm{end}(x) \in \Sigma_k \supset \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(x))] & (k \leq n) \\
\mathrm{RFN}_{\Pi_n}(\mathcal{A}) & : & \forall x[\mathrm{Prov}_{\mathcal{A}}(x,\mathrm{end}(x)) \wedge \mathrm{end}(x) \in \Pi_k \supset \mathrm{Tr}_{\Pi_k}(\mathrm{end}(x))] & (k \leq n) \\
\omega\text{-}\mathrm{CON}^{\mathrm{G}}(\mathcal{A}) & : & \forall A[\mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(\ulcorner \exists x A(x) \urcorner) \supset \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(\ulcorner \neg A(\dot{x}) \urcorner)] & \\
k\text{-}\mathrm{CON}(\mathcal{A}) & : & \forall A \in \Pi_{k-1}[\mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(\ulcorner \exists x A(x) \urcorner) \supset \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathcal{A}}(\ulcorner \neg A(\dot{x}) \urcorner)] &
\end{array}
$$

このとき, 以下のことが知られている.

定理 1.1 (Smoryński [5, 6]) $\mathcal{A}$ を算術の言語の理論とする. このとき, PRA 上で次が成立.

1. $\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{A})$.
2. ω-$\mathrm{CON}^{\mathrm{G}}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{A} + \mathrm{RFN}(\mathcal{A}))$.
3. k-$\mathrm{CON}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{A})$, ここで $k = 1, 2$.
4. k-$\mathrm{CON}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{A} + \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(\mathcal{A}))$, ここで $k \geq 2$.

また, Reflection principle を繰り返して得られる理論 $\mathcal{C}_n$ を以下のように定義する.

定義 1.2 以下のように, 論理式, 公理図式および理論を定義する.

1. $\mathcal{B}_0$ で帰納法以外の算術の公理の conjunction をあらわす. ($\mathcal{B}_0 \in \Pi_1$に注意.)
2. 論理式 F および 自由変数 a に対して, 論理式 $\mathrm{IA}_F(a)$ を以下のように定義する.

$$\mathrm{IA}_F(a) \ : \ \forall \bar{x}[\mathcal{B}_0 \wedge F(0) \wedge \forall x(F(x) \supset F(x')) \supset F(a)]$$

(このとき, 全ての自然数 n および全ての論理式 F に対して $\vdash \mathrm{IA}_F(\bar{n})$ に注意.)

3. 公理図式 Ind および qf-Ind を以下のように定義する.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ind} & : & \forall x \mathrm{IA}_F(x) \ (\text{F は論理式}) \\
\text{qf-Ind} & : & \forall x \mathrm{IA}_F(x) \ (\text{F は quantifier free な論理式})
\end{array}
$$

4. 理論 $\mathcal{C}_n$ を以下のように帰納的に定義する.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}_0 & : & \text{帰納法以外の算術の公理の conjunction (即ち, } \mathcal{B}_0) \\
\mathcal{C}_{n+1} & : & \text{qf-Ind} + \mathcal{C}_n + \mathrm{RFN}(\mathcal{C}_n)
\end{array}
$$

次のことが知られている.

定理 1.2 $\mathrm{PRA} \vdash \mathcal{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{PA}$

2 Mintsの標準型定理

本節において, Mintsの標準型定理を [1] に従って紹介する. 本節および次節では, LK の証明図のみを扱う. 以後, "$\vdash \Gamma \to \Delta$" は, LK で sequent $\Gamma \to \Delta$ が証明可能である事を示す.

定義 2.1 推論図 I において, 自由変数 a が, その upper sequent に出現し, lower sequent に出現せず, eigenvariable として使用されていないとき, a は I で redundant であるという. また, 証明図 π において, 自由変数 a がある推論図で redundant であるとき, a は π で redundant であるという.

例 2.1 下の推論図に現れている自由変数 a は, この推論図において redundant である.

$$\frac{A(a) \to \exists x A(x)}{\forall x A(x) \to \exists x A(x)}$$

定義 2.2 論理記号に関する推論図 I は, 少なくともひとつの副論理式 A が次の条件のいずれかを満たすとき, redundant であるという.

1. A が I の upper sequent の左辺に現われ, それが証明できる.
2. A が I の upper sequent の右辺に現われ, その否定が証明できる.

例 2.2

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta} \text{ が redundant } \quad \Leftrightarrow \quad \vdash A \to \ \text{ または } \vdash \to B$$

定義 2.3 証明図は以下の条件を全て満たすとき irreducible であるという.

1. cut を含まない.
2. redundant な変数を含まない.
3. redundant な推論図を含まない.

定理 2.1 (Mints) 定数記号を少なくともひとつ含むと仮定する. このとき, 任意の証明図は, それと同じ *end sequent* をもつ *irreducible* な証明図が存在する.

Mints は論文 [4] で model theoreitc な証明と proof theoretic な証明 (無限の証明図を使用) を与えている. 本稿では, Arai [1] による証明を与える.

系 2.1 PA は無矛盾

証明 PA が矛盾すると仮定する. すると, ある論理式 $F_1, \ldots, F_n$ に対して,

$$C_0, \forall x \mathrm{IA}_{F_1}(x), \ldots, \forall x \mathrm{IA}_{F_n}(x) \to \tag{1}$$

が証明できる. Mints の標準型定理より sequent (1) の irreducible な証明図 π がある. C_0 は無矛盾なので, ある $\forall x \mathrm{IA}_{F_i}(x)$ を主論理式とする推論図がある. そのうちの最も下に現れる推

論図を I とし, その主論理式を $\forall x \mathrm{IA}_{F_k}(x)$ とすると, π は下図のようにあらわせる.

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall\bar{x}[\mathcal{C}_0 \land F_k(0) \land \forall x(F_k(x) \supset F_k(x')) \supset F_k(t)], \Gamma \to \Delta\end{array}}{\begin{array}{c}\forall y \forall\bar{x}[\mathcal{C}_0 \land F_k(0) \land \forall x(F_k(x) \supset F_k(x')) \supset F_k(y)], \Gamma \to \Delta\\ \vdots\\ \mathcal{C}_0, \forall x \mathrm{IA}_{F_1}(x), \ldots, \forall x \mathrm{IA}_{F_n}(x) \to\end{array}}\ I$$

仮定より, I と end sequent の間には $\forall x \mathrm{IA}_F(x)$ という形をした論理式を主論理式とする推論図はないので, そこに現れる推論図は, cut 以外の構造に関する推論図または, $\mathcal{C}_0$ またはその部分論理式を主論理式とする $\neg$:左, $\land$:左または $\forall$:左である. end sequent が自由変数を含まないことと, π が redundant な変数を含まない事から, I の upper sequent も自由変数を含まない. よって, t は closed term である.

t が closed term であるとき, $\forall\bar{x}[\mathcal{C}_0 \land F_k(0) \land \forall x(F_k(x) \supset F_k(x')) \supset F_k(t)]$ は証明できるが, これは π が irreducible であることに反する. 従って, PA は無矛盾である. $\dashv$

定理 2.2 (Arai)

$$\mathrm{PRA} \vdash \text{“}\textit{Mints} \text{ の標準型定理”} \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathrm{PA})$$

証明 $(\to)$ “$\mathrm{PA} \vdash \exists x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ は真” を PRA の中で帰謬法を使って示す. (ここで, $A(x) \in \Pi_1$ であることに注意.) よって, $\mathrm{PA} \vdash \exists x A(x)$ かつ $\exists x A(x)$ は偽であると仮定する.

$\mathrm{PA} \vdash \exists x A(x)$ と Mints の標準型定理より,

$$\Gamma \to \exists x(\mathcal{C}_0 \land A(x))$$

の irreducible な証明図 π が存在する. ここで, Γ は $\mathcal{C}_0$ と $\forall x \mathrm{IA}_F(x)$ という形をした論理式からなる列. $\mathcal{C}_0$ は無矛盾であるので, $\forall x \mathrm{IA}_F(x)$ という形をした論理式または $\exists x(\mathcal{C}_0 \land A(x))$ を主論理式とする推論図が存在する. それらの推論図の内の最も下にあるものを I とする. I の主論理式が $\forall x \mathrm{IA}_F(x)$ という形をした論理式であるとすると, 上の系と同様にして π が irreducible であることと矛盾する. よって, I の主論理式は $\exists x(\mathcal{C}_0 \land A(x))$ である. すると, π は下図のようにあらわせる.

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Lambda \to \Pi, \mathcal{C}_0 \land A(t)\end{array}}{\begin{array}{c}\Lambda \to \Pi, \exists x(\mathcal{C}_0 \land A(x))\\ \vdots\\ \Gamma \to \exists x(\mathcal{C}_0 \land A(x))\end{array}}\ I$$

上の系の証明と同様の議論により I より下には自由変数は現れないことがわかる. よって, t は closed term である.

一方, $\exists x A(x)$ は偽であることから $\forall x \neg A(x)$ は真である. $\neg A(x)$ は Σ_1-論理式だから, Σ_1-completeness より, 上の closed term t に対して $\vdash \mathcal{C}_0 \to \neg A(t)$, すなわち $\vdash \mathcal{C}_0 \land A(t) \to$ となる. しかし, これは π が irreducible であることに反する. よって, $\mathrm{PA} \vdash \exists x A(x)$ ならば $\exists x A(x)$ は真である.

$(\leftarrow)$ 先ず, 証明に必要な概念を定義する.

定義 2.4 論理式 A に対して, $d(A)$ で A に現われる論理記号の個数を示す.

定義 2.5 推論図 I に対して, その degree $d(I)$ を以下のように定義する.

$$d(I) = \begin{cases} d(C) & I \text{ は cut で } C \text{ はその cut 論理式} \\ \max\{d(A)\colon A \text{ は } I \text{ の副論理式}\} & I \text{ は論理記号に関する推論図} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

定義 2.6 π を証明図, S を π に現れる sequent とする. このとき, S の高さ $h(S;\pi)$ (混乱の恐れがない場合は $h(S)$ と省略) を以下のように定義する.

1. S が end sequent のとき, $h(S) = 0$.
2. S がある推論図 I の upper sequent で, I の lower sequent S_1 に対しては, $h(S_1)$ が定義されていると仮定する. そのとき, $h(S) = \max\{h(S_1), d(I)\}$.

次に, 全ての証明図に対して, それに現れる sequent および推論図に ε_0 より小さな順序数を割り当て, それらを用いて各証明図に ε_0 より小さな順序数を対応させる.

定義 2.7 π を証明図, S と I をそれぞれ π に現れる sequent および推論図とする. このとき, S と I に順序数 $O(S;\pi)$ および $O(I;\pi)$ (混乱の恐れがない場合は $O(S)$ および $O(I)$ と省略) を以下のように対応させる.

1. S が initial sequent のとき, $O(S) = 1$.
2. I の upper sequent S_1 (S_2) に対しては, $O(S_1)$ ($O(S_2)$) が定義されていると仮定する. このとき, $O(I)$ を以下のように定義する.
   (a) I が cut 以外の構造に関する推論図のとき, $O(I) = O(S_1)$.
   (b) I が cut のとき, $O(I) = O(S_1) \# O(S_2)$.
   (c) I が論理記号に関する推論図のとき,

$$O(I) = \begin{cases} O(S_1) \# \omega^{d(I)} & I \text{ が一つの upper sequent をもつとき} \\ O(S_1) \# O(S_2) \# \omega^{d(I)} & I \text{ が二つの upper sequent をもつとき.} \end{cases}$$

3. S が I の lower sequent で, $O(I)$ が定義されていると仮定する. このとき, $O(S)$ を以下のように定義する.

$$O(S) = \omega_{\rho-\sigma}(O(I)).$$

   ここで, ρ は S の高さで σ は I の lower sequent の高さ. また, $\omega_0(\alpha) = \alpha$, $\omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)}$.

最後に, 証明図 π に対して ordinal $O(\pi)$ を π の end sequent S に対応する ordinal $O(S)$ で定義する.

定義 2.8 π を証明図とする. その中に現われる sequent S において, S より下に論理記号に関する推論図が現われないとき, S は π の end place に属するといわれる. π の中に現われる推論図 I において, I の lower sequent は end place に属し, upper sequent は end place に属さないとき, I は境界推論図といわれる.

以下で, 証明を与える.

$\prec$ で order type が ε_0 の canonical ordering をあらわし, $\mathrm{Prog}_{\prec}(A)$ で論理式 $\forall x(\forall y \prec x A(y) \supset A(x))$ をあらわすこととする.

先ず, 論理式 $A(\alpha)$ を以下の論理式とする.

$$\forall\pi : \text{証明図}\ [O(\pi) = \alpha \supset \exists\pi' : \text{証明図}\ (\text{“}\pi' \text{ は irreducible''} \ \&\ \mathrm{end}(\pi') = \mathrm{end}(\pi))]$$

ここで, $\forall\alpha A(\alpha) \Leftrightarrow$ “Mints の標準型定理” であることと $A(\alpha) \in \Pi_3$ に注意.

$\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{Prog}_{\prec}(A)$ であると仮定する. すると,

$$\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \mathrm{Prog}_{\prec}(A) \urcorner)$$

一方, Gentzen が示したように

$$\mathrm{PRA} \vdash \forall\alpha \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \mathrm{Prog}_{\prec}(A) \supset A(\dot{\alpha}) \urcorner)$$

であるから, 上と合わせて

$$\mathrm{PRA} \vdash \forall\alpha \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner A(\dot{\alpha}) \urcorner).$$

よって,

$$\mathrm{PRA} + \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathrm{PA}) \vdash \forall\alpha A(\alpha).$$

すなわち,

$$\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathrm{PA}) \rightarrow \text{“Mints の標準型定理''}.$$

よって, “$\forall\beta \prec \alpha A(\beta) \Rightarrow A(\alpha)$” を PRA の中で証明する. π を証明図とし, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ と $O(\pi) = \alpha$ と仮定する. このとき, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在することを示せばよい. π をその構造により分類して考察する. ここで, ある case を考えるとき, 先行する case は成り立たないと仮定する.

1. redundant な変数を持つ場合.
   redundant な変数に定数記号 0 を代入する. この操作をしてできる証明図に対応する ordinal は, 元の証明図に対応している ordinal と同じである.
2. end place にその子孫が cut 論理式となる weakening がある場合.
   π が次のような形であるとする.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Lambda_1 \rightarrow \Pi_1}}{\dfrac{\Lambda_1 \rightarrow \Pi_1, D}{\vdots}} \qquad \vdots}{\dfrac{\Lambda_2 \rightarrow \Pi_2, D \quad D, \Lambda_3 \rightarrow \Pi_3}{\Lambda_2, \Lambda_3 \rightarrow \Pi_2, \Pi_3}}$$

$$\vdots$$

π を次の π' に変形する.

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\Lambda_1 \to \Pi_1 \\
\vdots \\
\Lambda_2 \to \Pi_2 \\
\hline\hline
\Lambda_2, \Lambda_3 \to \Pi_2, \Pi_3 \\
\vdots
\end{array}
$$

このとき, $O(\pi') \prec O(\pi)$ となる. 仮定より, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ であるから, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在する.

3. end place にその子孫が cut 論理式となる initial sequent がある場合.
π が次のような形であるとする.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Lambda_1 \to \Pi_1, D\end{array} \quad \begin{array}{c} D \to D \\ \vdots \\ D, \Lambda_2 \to \Pi_2, D, \Pi_3\end{array}}{\Lambda_1, \Lambda_2 \to \Pi_1, \Pi_2, D, \Pi_3}
\\
\vdots
$$

π を次の π' に変形する.

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\Lambda_1 \to \Pi_1, D \\
\hline\hline
\Lambda_1, \Lambda_2 \to \Pi_1, \Pi_2, D, \Pi_3 \\
\vdots
\end{array}
$$

このとき, $O(\pi') \prec O(\pi)$ となる. 仮定より, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ であるから, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在する.

4. redundant な境界推論図 I がある場合.
π が次のような形であるとする.

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{A, \Lambda \to \Pi}{A \land B, \Lambda \to \Pi}\, I \\
\vdots
\end{array}
$$

ここで, I の upper sequent の高さを ρ, lower sequent の高さを σ とする.
仮定より I は redundant だから $\vdash \to A$ である. よって, $\to A$ の cut free な証明図が存在する. この証明図を利用して, π を次の π' に変形する.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \to A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ A, \Lambda \to \Pi\end{array}}{\Lambda \to \Pi}}{A \land B, \Lambda \to \Pi}\, I' \\
\vdots
\end{array}
$$

このとき, I' の upper sequent の高さは ρ で, lower sequent の高さは σ である. また, $\to A$ の証明図は cut free であるから, そこに現われる論理記号に関する推論図の副論理式は, A の部分論理式である. 従って, $O(\to A;\pi') \prec \omega^{d(A)}$ である. すると,

$$\begin{aligned}
O(A\land B,\Lambda\to\Delta;\pi') &= \omega_{\rho-\sigma}(O(\to A;\pi')\sharp O(A,\Lambda\to\Delta;\pi')) \\
&\prec \omega_{\rho-\sigma}(\omega^{d(A)}\sharp O(A,\Lambda\to\Delta;\pi')) \\
&= \omega_{\rho-\sigma}(\omega^{d(A)}\sharp O(A,\Lambda\to\Delta;\pi)) \\
&= O(A,\Lambda\to\Delta;\pi))
\end{aligned}$$

よって $O(\pi') \prec O(\pi)$ となる. 仮定より, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ であるから, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在する.

5. explicit な境界推論図 I がある場合.
π が次のような形であるとする.

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
A,\Lambda\to\Pi \\ \hline
A\land B,\Lambda\to\Pi
\end{array}\ I
\qquad
\begin{array}{c}
\\ \vdots \\
\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2\to\Delta
\end{array}$$

π を次の π' に変形する.

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
A,\Lambda\to\Pi \\ \hline\hline
A\land B,\Lambda,A\to\Pi \\
\vdots \\
\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2,A\to\Delta
\end{array}$$

このとき, $O(\pi') \prec O(\pi)$ となる. 仮定より, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ であるから, end sequent が $\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2,A\to\Delta$ である irreducible な証明図 π_1 が存在する. この π_1 を利用して π_2 を以下のようにつくる.

$$\begin{array}{c}
\pi_1\ \vdots \\
\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2,A\to\Delta \\ \hline\hline
A,\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2\to\Delta \\ \hline
A\land B,\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2\to\Delta \\ \hline\hline
\Gamma_1, A\land B,\Gamma_2\to\Delta
\end{array}$$

仮定より I は redundant ではないので, $\nvdash\to A$. よって π_2 は π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図である.

6. 全ての境界推論図が implicit である場合.
このとき, その両方の cut 論理式が境界推論図の主論理式の子孫である cut I が存在する.

π が次のような形であるとする.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}\vdots\\ \cfrac{\Lambda_1 \to \Pi_1, A(a)}{\Lambda_1 \to \Pi_1, \forall xA(x)}\,I_1\\ \vdots\\ \Lambda_2 \to \Pi_2, \forall xA(x)\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\vdots\\ \cfrac{A(t), \Lambda_3 \to \Pi_3}{\forall xA(x), \Lambda_3 \to \Pi_3}\,I_2\\ \vdots\\ \forall xA(x), \Lambda_4 \to \Pi_4\end{array}
\\ \hline
\Lambda_2, \Lambda_4 \to \Pi_2, \Pi_4 \\
\vdots \\
\Lambda \to \Pi \\
\vdots
\end{array}\,I
$$

ここで, I_1 と I_2 は境界推論図で, $\Lambda \to \Pi$ は I の upper sequent の高さより小さい高さを持つ sequent のうちで最も上にあるもの.
π を次の π' に変形する.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}\vdots\\ \Lambda_1 \to \Pi_1, A(t)\\ \hline\hline \Lambda_1 \to A(t), \Pi_1, \forall xA(x)\\ \vdots\\ \Lambda_2 \to A(t), \Pi_2, \forall xA(x)\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\vdots\\ \forall xA(x), \Lambda_4 \to \Pi_4\end{array}
\\ \hline
\Lambda_2, \Lambda_4 \to A(t), \Pi_2, \Pi_4\\
\vdots\\
\Lambda \to A(t), \Pi\\ \hline\hline
\Lambda \to \Pi, A(t)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}\vdots\\ \Lambda_2 \to \Pi_2, \forall xA(x)\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\vdots\\ A(t), \Lambda_3 \to \Pi_3\\ \hline\hline \forall xA(x), \Lambda_3, A(t) \to \Pi_3\\ \vdots\\ \forall xA(x), \Lambda_4, A(t) \to \Pi_4\end{array}
\\ \hline
\Lambda_2, \Lambda_4, A(t) \to \Pi_2, \Pi_4\\
\vdots\\
\Lambda, A(t) \to \Pi\\ \hline\hline
A(t), \Lambda \to \Pi
\end{array}
\end{array}
\\ \hline
\Lambda, \Lambda \to \Pi, \Pi\\ \hline\hline
\Lambda \to \Pi\\
\vdots
\end{array}
$$

このとき, $O(\pi') \prec O(\pi)$ となる. 仮定より, $\forall\beta \prec \alpha A(\beta)$ であるから, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在する.

以上により, π と同じ end sequent をもつ irreducible な証明図が存在することが示せた. $\dashv$

3 Arai と Mints の標準型定理

本節において, Arai と Mints の標準型定理 (cf.[2]) を紹介する.

定義 3.1 $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ をそれぞれ sentence の集合とする. そして, 各 $i \leq n$ に対して Λ_i を $\mathcal{A}_i$ に含まれる sentence の有限列 とし, π を $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n, \Gamma \to \Delta$ の証明図とする.

1. A を π に現われる論理式とする. A の子孫が Λ_i の中に現われるならば, A は i-traceable であるといわれ, Γ または Δ の中に現われるならば, $(n+1)$-traceable であるといわれる.

2. A を π に現われる $(i+1)$-traceable な論理式とする．A は，次の条件 (a) を満たすとき，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して left redundant であるといわれ，次の条件 (b) を満たすとき，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して right redundant であるといわれる．
   (a) A がそれの現われる sequent の左辺にあり，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_i \vdash A$.
   (b) A がそれの現われる sequent の右辺にあり，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_i \vdash \neg A$.
3. I を π に現われる論理記号に関する推論図とする．このとき，I の少なくともひとつの副論理式 F が $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して left または right redundant ならば，I は $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して redundant であるといわれる．
4. π は以下の条件を全て満たすとき，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して irreducible であるといわれる．
   (a) cut を含まない．
   (b) redundant な変数を含まない．
   (c) $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して redundant な推論図を含まない．

次の定理が成り立つ．

定理 3.1 (Arai & Mints) 定数記号を少なくともひとつ含むと仮定する．また，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ をそれぞれ *recursive* な *sentence* の集合とし，π を

$$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\Gamma \to \Delta$$

の証明図とする．このとき，

$$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\Gamma \to \Delta$$

を *end sequent* とする $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して *irreducible* な証明図が存在する．

証明　背理法によって示す．簡単のため，論理記号は $\neg$, $\wedge$ および $\exists$ のみとする．

$$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\Gamma \to \Delta$$

を end sequent とする $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n$ に関して irreducible な証明図が存在しないと仮定する．

このとき，sequent をその node とし，$\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\Gamma \to \Delta$ を root にもつ tree T_ω を以下のように定義する．T_ω は証明図ではないが，定義 3.1 を流用する．

先ず，term および $\cup_{i\le n}\mathcal{A}_i$ に含まれる論理式をそれぞれ $t_0,t_1,t_2,\dots$ および $F_0,F_1,F_2,\dots$ と一列に並べる．

次に，tree $T_i (i\in\omega)$ を帰納法で次のように定義する．

1. T_0 は $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\Gamma \to \Delta$ のみからなる tree.
2. T_{n+1} は T_n の各 top node である sequent の内，active な sequent $\Lambda \to \Pi$ の上にのみ以下で定義される sequent(s) をのせて出来る tree である．ここで，active な sequent とは，その左辺と右辺に共通な原始論理式を含まない sequent のことである．
   (a) $n = 3k+1$ のとき．先ず，下のように論理式の列をつくる．

$\neg A_0,\dots,\neg A_p$　:　Λ に現われる $\neg C$ なる形をした論理式を全て並べた物

$\neg B_0,\dots,\neg B_q$　:　Π に現われる $\neg C$ なる形をした論理式を全て並べた物

次に, 以下の sequent をつくる.

$$F_{3k+1}, B_0, \ldots, B_q, \Lambda \to \Pi, A_0, \ldots, A_p$$

この sequent において, $A_0, \ldots, A_p$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right redundant なものを除き, $B_0, \ldots, B_q$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して left redundant なものを除いてできる sequent を $\Lambda \to \Pi$ の上にのせる.

(b) $n = 3k+2$ のとき. 先ず, 下のように論理式の列をつくる.

$A_0^0 \wedge A_0^1, \ldots, A_p^0 \wedge A_p^1$: Λ に現われる $C \wedge D$ なる形をした論理式を全て並べた物
$B_0^0 \wedge B_0^1, \ldots, B_q^0 \wedge B_q^1$: Π に現われる $C \wedge D$ なる形をした論理式を全て並べた物

次に, 以下の sequent をつくる.

$$F_{3k+2}, A_0^0, A_0^1, \ldots, A_p^0, A_p^1, \Lambda \to \Pi, B_0^{\tau_0}, \ldots, B_q^{\tau_q} \quad ここで, \tau_i = 0, 1\ (i \leq q)$$

この sequent において, $A_0^0, A_0^1, \ldots, A_p^0, A_p^1$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して left redundant なものを除き, $B_0^{\tau_0}, \ldots, B_q^{\tau_q}$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right redundant なものを除いてできる sequent を全て $\Lambda \to \Pi$ の上にのせる.

(c) $n = 3k+3$ のとき. 先ず, 下のように論理式の列をつくる.

$\exists x A_0(x), \ldots, \exists x A_p(x)$: Λ に現われる $\exists x D(x)$ なる形をした論理式を全て並べた物
$\exists x B_0(x), \ldots, \exists x B_q(x)$: Π に現われる $\exists x D(x)$ なる形をした論理式を全て並べた物

次に, 以下の sequent をつくる.

$$F_{3k+3}, A_0(a_{i_0}), \ldots, A_p(a_{i_p}), \Lambda \to \Pi, B_0(t_0), \ldots, B_0(t_k), \ldots, B_q(t_0), \ldots, B_q(t_k)$$

ここで, $a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}$ は $\Lambda \to \Pi$ に現われない最初の p 個の自由変数である.
この sequent において, $A_0(a_{i_0}), \ldots, A_p(a_{i_p})$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して left redundant なものを除き, $B_0(t_0), \ldots, B_0(t_k), \ldots, B_q(t_0), \ldots, B_q(t_k)$ から $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right redundant なものと $\Lambda \to \Pi$ に現われない自由変数を含むものを除いてできる sequent を $\Lambda \to \Pi$ の上にのせる.

$T_\omega = \cup_{i \in \omega} T_i$ とする. T_ω の path が全て有限の長さしか持たないならば, T_ω から

$$\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n, \Gamma \to \Delta$$

を end sequent とする $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して irreducible な証明図をつくることができる. しかし, これは仮定に反する. よって, T_ω は無限 path $\mathcal{W}$ をもつ. $\mathcal{W}$ に含まれる sequent の左辺に現われる論理式からなる集合を $\mathcal{W}_a$, 右辺に現われる論理式からなる集合を $\mathcal{W}_s$ とする. このとき, $\mathcal{W}_a$ および $\mathcal{W}_s$ は以下の性質をもつ.

(atomic) $\mathcal{W}_a$ と $\mathcal{W}_s$ の両方に含まれる原始論理式は存在しない.

($\neg$) $\neg C \in \mathcal{W}_a$ ($\mathcal{W}_s$) ならば, C は $\mathcal{W}_s$ ($\mathcal{W}_a$) に含まれるかまたは $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right (left) redundant である.

($\wedge$:左) $C \wedge D \in \mathcal{W}_a$ ならば, C と D のどちらも, $\mathcal{W}_a$ に含まれるかまたは $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して left redundant である.

($\wedge$:右) $C \wedge D \in \mathcal{W}_a$ ($\mathcal{W}_s$) ならば, C または D は, W_s に含まれるかまたは $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right redundant である.

($\exists$:左) $\exists x C(x) \in \mathcal{W}_a$ ならば, ある自由変数 a に対して, $C(a)$ は $\mathcal{W}_a$ に含まれるかまたは $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して left redundant である.

($\exists$:右) $\exists x C(x) \in \mathcal{W}_s$ ならば, 任意の term t に対して, $C(t)$ は $\mathcal{W}_s$ に含まれるかまたは $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ に関して right redundant である.

構造 $\mathcal{M}$ を次のように定義する. $\mathcal{M}$ の universe を term 全体からなる集合とする. 定数記号 c の解釈 $c^{\mathcal{M}}$ を c 自身とする. 関数記号 f の解釈 $f^{\mathcal{M}}$ は $f^{\mathcal{M}}(t_0, \ldots, t_n) = f(t_0, \ldots, t_n)$ で定義する. 述語記号 P の解釈 $P^{\mathcal{M}}$ は $(t_0, \ldots, t_n) \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_0, \ldots, t_n) \in \mathcal{W}_a$ で定義する. また, σ を自由変数 a に $a(\in |\mathcal{M}|)$ を対応させる assignment とする. このとき, 次が成り立つ.

$$[A \in W_a \& \ A \text{ は } i\text{-traceable } \Rightarrow (\mathcal{M}, \sigma) \models A] \& [A \in W_c \& \ A \text{ は } i\text{-traceable } \Rightarrow (\mathcal{M}, \sigma) \not\models A]$$

証明は, i と $d(A)$ (cf. 定義 2.4) に関する 2 重帰納法による. 各 $\mathcal{A}_i$ の元および Γ に現われる論理式は $\mathcal{W}_a$ に含まれ, Δ に現われる論理式は $\mathcal{W}_c$ に含まれるので,

$$(\mathcal{M}, \sigma) \not\models \mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n, \Gamma \to \Delta$$

となる. しかし, これは

$$\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n, \Gamma \to \Delta$$

が証明できる事に反する. したがって, 求める証明図は存在する. $\dashv$

系 3.1 $\mathcal{C}_{n+1}$ を定義 1.2 で定義された理論とする. このとき,

$$\mathrm{PRA} \vdash \text{“}\textit{Arai} \text{ と } \textit{Mints} \text{ の標準型定理”} \to \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{C}_{n+1}).$$

証明 $\mathcal{C}_{n+1} \vdash \exists x A(x)$ と $\exists x A(x)$ が偽であることを仮定して矛盾を導く. ここで, $A(x)$ が Π_1-論理式であることに注意.

$\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n$ に関する Arai と Mints の標準型定理と $\mathcal{C}_{n+1} \vdash \exists x A(x)$ より,

$$\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1} \to \exists x A(x)$$

の $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n$ に関して irreducible な証明図 π が存在する. $\mathcal{C}_0$ が無矛盾であることから, π に現われる推論図で $\mathcal{C}_0$ に含まれない論理式を主論理式とするものがある. それらの推論図のうちで最も下にあるものを I とする.

I の主論理式が $\exists x A(x)$ であるとする. (ここで, $\exists x A(x)$ は $(n+1)$-traceable である.) 仮定より $\exists x A(x)$ は偽であるから, 任意の closed term t に対して $\neg A(t)$ は真で, しかも Σ_1-論理式である. 従って, Σ_1-completeness より $\vdash \mathcal{C}_0 \to \neg A(t)$ を得る. よって, $\vdash \mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n \to \neg A(t)$ である. すると, 定理 2.2 と同様にして π が irreducible であることと矛盾する.

また, I の主論理式が qf-Ind であるとすると系 2.1 と同様にして π が irreducible であることと矛盾する.

従って, I の主論理式は, $\mathrm{RFN}(\mathcal{C}_i)$ $(i \leq n)$ と言う形をした論理式でなければならない. (ここで, $\mathrm{RFN}(\mathcal{C}_i)$ は $(i+1)$-traceable である.) このとき, π は下図のようにあらわせる.

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k \supset \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(t)), \Lambda \to \Pi}{\mathrm{RFN}(\mathcal{C}_i), \Lambda \to \Pi}\ I \\
\vdots \\
\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1} \to \exists x A(x)
\end{array}
$$

系 2.1 と同様の議論から I より下には自由変数は現れないことがわかる. よって, t は closed term である.

$\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k$ が偽であると仮定する. すると, この論理式は quantifier free なので, Σ_1-completeness より

$$\vdash \mathcal{C}_0 \to \neg(\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k)$$

を得る. よって,

$$\vdash \mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_i \to (\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k \supset \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(t)))$$

を得るが, これは π が irreducible であることに反する.

従って, $\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k$ は真である. t は closed term だから $\ulcorner C \urcorner = \mathrm{end}(t)$ なる論理式 C が存在する. $\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t))$ は真であるから, $\vdash \mathcal{C}_i \to C$ である. また, $\mathrm{end}(t) \in \Sigma_k$ が真である事から, $C \in \Sigma_k$. よって, $\vdash \mathcal{C}_i \to \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\ulcorner C \urcorner)$, すなわち $\vdash \mathcal{C}_i \to \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(t))$ を得る. 従って,

$$\vdash \mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_i \to (\mathrm{Prov}_{\mathcal{C}_i}(t, \mathrm{end}(t)) \land \mathrm{end}(t) \in \Sigma_k \supset \mathrm{Tr}_{\Sigma_k}(\mathrm{end}(t)))$$

を得るが, これは π が irreducible であることに反する.

よって, $\mathcal{C}_{n+1} \vdash \exists x A(x)$ ならば $\exists x A(x)$ は真である. $\dashv$

この系の逆, すなわち次の定理が成り立つ. 証明は定理 2.2 の証明と類似した方法で与えられる. 詳しくは論文 [2] を参照のこと.

定理 3.2 $\mathcal{C}_{n+1}$ を定義 1.2 で定義された理論とする. このとき,

$$\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{C}_{n+1}) \to \text{“}\textit{Arai}\ \text{と}\ \textit{Mints}\ \text{の標準型定理”}.$$

上の系より, PA が ω-consistent であることが次のように示される.

系 3.2 PA は ω-*consistent* である.

証明 上の系より, $\mathcal{C}_0$ と $\mathcal{C}_1$ に関する Arai と Mints の標準型定理から, $\mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathcal{C}_2)$ を得る. $\mathcal{C}_2 = \text{qf-Ind} + \mathcal{C}_1 + \mathrm{RFN}(\mathcal{C}_1)$ であることと PRA 上で $\mathcal{C}_1$ と PA が同値 (cf. 定理 1.2) であることから, PRA 上で $\mathcal{C}_2$ と $\mathrm{PA} + \mathrm{RFN}(\mathrm{PA})$ は同値である. よって, $\mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathrm{PA} + \mathrm{RFN}(\mathrm{PA}))$ が成り立つ. ところで, 定理 1.1 より PRA 上で $\mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathrm{PA} + \mathrm{RFN}(\mathrm{PA}))$ は $\omega\text{-CON}^{\mathrm{G}}(\mathrm{PA})$ と同値である. 従って, PA は ω-consistent である. ⊣

参考文献

[1] T. Arai, *From Gentzen's Attic*, unpublished manuscript, (1992)

[2] T. Arai and G. Mints, *Extended normal form theorems for logical proofs from axioms*, preprint.

[3] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen. I. II.*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176–210, 405–431.

[4] G. Mints, *A normal form for logical derivations implying one for arithmetic derivations*, Ann. Pure Appl. Logic 62 (1993), 65–79.

[5] C. Smoryński, *ω-consistency and reflection*, in Colloque International de Logique (Clermont-Ferrand, 1975), 167–181, Colloques Internat. CNRS 249, CNRS, paris, 1977.

[6] ____________, *The incompleteness theorems*, in Handbook of mathematical logic (J.Barwise, editor), 821–865, North-Holland, Amsterdam, 1977.